数理解析研究所講究録
640巻 1988年 86-105

高次元積分可能系の変換理論の問題

京大数理解析研究所　　高崎金久

(RIMS, Kyoto University)　(Kanehisa TAKASAKI)

§0. 序論

我々は高次元の場合も含めて積分可能系をD加群の変形として、またその解空間をグラスマン多様体として理解することを目指してきた（本講究録の鈴木、大山、中屋敷の記事を参照）。このグラスマン多様体は無限次元であるから取扱には注意を要するが、素朴に考えれば有限次元の場合と同様に左から一般線型群が働いている等質空間であって、それが積分可能系の解の変換群を与えると期待される。さらにその無限小作用を考えることによって、対応するリー代数が解の無限小変換を与えるはずである。この素朴な期待は果して報いられるだろうか。

ＫＰ方程式をはじめとするソリトン方程式の場合には実際にそのような変換理論が作られている。しかももう少し精密なことが判っている。つまり単にグラスマン多様体への群作用を考えるだけでなくその上のある直線束（プ

リュッカー座標はその切断を与える）に対する変換理論を構成しようとすると、自然に一般線型群の射影表現あるいは対応するリー代数の中心拡大が現れる。このことの背後には実はある種の量子場が関与していて、射影表現・中心拡大の出現は場の量子論固有のアノマリー（異常項）と呼ばれる現象の一種と解釈できる。ただ、今の場合には量子場が２次元時空に棲んでいるという特殊事情のために、アノマリーと言ってもごく簡単なものしか出てこないのである。問題は、果して高次元の場合にも同じ様な議論が可能かということである。

結論を先に述べると、高次元の場合には話はそう簡単ではなさそうなのである。ＫＰ方程式の場合のやり方を素朴に踏襲して無限小変換を構成してみようとすると、猛烈な発散が現れる。このような発散は場の量子論にはつきものの現象であって、これをなんとかして”繰り込む”ことが必要になる。ＫＰ方程式に対しては、２次元量子場固有の事情として、この発散は関係するフェルミ場の積を正規積で置き換えることで処理できる。この置き換えの影響として対応するリー代数の交換関係に異常が現れるが、これが前述の中心拡大の起源である。これに対して、高次元では同様の正規積の処方では発散は全然解消されない。これに限らず、高次元でのＤ加群の問題にはさまざまな望ましくない無限が登場する。このことは、我々の素朴なグラスマン多様体が高次元積分可能系の理論の幾何学的枠組としてはあまり適切なものではないかも知れない、という可能性を示唆するように思われる。以下ではこれらの点について議論する。

§1、2、3ではKP方程式（つまり1次元理論）について変換理論の概要を解説する。更に詳しい内容については

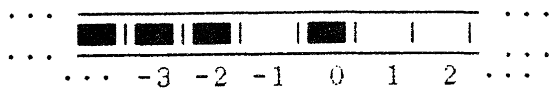
M. Sato and Y. Sato, Soliton Equations as Dynamical Systems on Infinite Dimensional Grassmann Manifold, in Proc. U.-S. Japan Seminor "Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science", Tokyo 1982, ed. P.D. Lax, H. Fujita, North-Holland/Kinokuniya;

M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983), 943-1001;

など参照されたい。§4、5で高次元への拡張に関わる問題を論じる。

§1. 普遍グラスマン多様体

普遍グラスマン多様体を定義するために、まず、ヤング図形とかマヤ図形とかいうような概念を用意しておく必要があるが、ページ数を節約するためにマヤ図形についてのみ説明する。自然数全体 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ の補集合 $\mathbb{N}^c = \{-1, -2, \ldots\}$ から整数全体 $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ への単調増加写像は数列 $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}^c}$ と同一視出来るが、これを $\mathbb{Z}$ を1次元の格子にあらわし、s_i, $i \in \mathbb{N}^c$, の位置が粒子で占められているというように解釈したものがマヤ図形である。

例： $(\ldots, -4, -3, -2, 0) \leftrightarrow$ 

（■ が粒子をあらわす。）しかし以下では図形的な表示は必要ないので、もっぱら数列による表示を利用する事にして、その代わり、数列 $S = (s_i)_{i \in \mathbb{N}^c}$ としては必ずしも単調増加ではないものも含めて扱うことにする。その方が後の記号法上便利である。但し、単にマヤ図形 S といったら S は単調増加であることを同時に意味するものと理解する。（ちなみに、マヤ図形という名前の由来はよく判らない；一説には兵庫県に実在する摩耶という地名をとったものと言うが、真偽のほどは定かではない。）

グラスマン多様体 UGM は基底 e_i, $i \in \mathbb{Z}$, をもつ無限次元線型空間 $\mathbb{V}$ のある条件を満たす線型部分空間の集合として定義される。$\mathbb{V}$ の部分空間 $V^{(n)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を $V^{(n)} = \{\Sigma\, v_i e_i;\ v_i = 0 \text{ for } i < n\}$ で定義する。$V^{(n)}$ は $\mathbb{V}$ のフィルター付けを与えるが、これを原点の基本近傍系にとることによって $\mathbb{V}$ に線型位相を入れることが出来る。これを用いて UGM を次のように定義する。

UGM := { $V \subset \mathbb{V}$; 閉線型部分空間で

$$\dim V \cap V^{(0)} = \dim \mathbb{V} / (V + V^{(0)}) < \infty \}$$

さて、UGM の各元 V に対して基底 $\xi^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N}^c)$ を一つ選んで、$\xi^{(j)} = \Sigma\, \xi_{ij} e_i$ によって行列 $\xi = (\xi_{ij})_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^c}$ を作る。この基底はある番号（$-m$ とする）から先では （つまり $j < -m$ では）

$$\xi^{(j)} = e_j + \xi_{j+1\,j} e_{j+1} + \xi_{j+2\,j} e_{j+2} + \cdots$$

と選ぶことが出来る。このとき前述のマヤ図形に対応する数列 $S = (s_j)_{j \in \mathbb{N}^c}$ を添字として、プリュッカー座標 ξ_S を

$$\xi_S := \det(\xi_{s_i j};\ i, j \in \mathbb{N}^c)$$

で定義する。これは無限行列式だが、実は、十分大きい自然数 N をとって i, j の動く範囲を -N から -1 までに限定した小行列式を考えると、それは N によらないものになるので、それを上の無限行列式の定義とする。この定義は数列 $S = (s_i)_{i \in \mathbb{N}^c}$ が必ずしも単調増加でも単射でもなくて、単に $s_i = i$（高々有限個の添字を除いて）という条件が満たされているだけのときにも適用できるので、我々はプリュッカー座標をそのように拡張された意味でも用いる。そのように拡張された表示を用いると、プリュッカー座標の間に成り立つプリュッカー関係式は次のように書ける。

$$\sum_{i \leq 0} (-)^i \xi_{(\ldots,\, s_{-3},\, s_{-2},\, s'_i)} \xi_{(\ldots,\, s'_{i-1},\, s'_{i+1},\, \ldots)} = 0$$

ここに s_i $(i \leq -1)$, s'_i $(i \leq 0)$ は $s_i = s'_i = i$（高々有限個の添字を除いて）という条件を満たす任意の整数列にわたる。この式の左辺では実は有限個の項しか生き残らないので（ i のある下限から先では第一のプリュッカー座標の添字に重複が出てくるので、消える）、これは代数的な関係式である。これらの関係式は ξ_S がプリュッカー座標であることを逆に特徴付けている。

プリュッカー座標は V の基底或は行列 ξ を与えて初めて定まるもので、

UGM の点に対しては定数倍の不定さがある。そのことを幾何学的に表現するために次のようなものを導入する。

$$\widetilde{UGM} := \{ \ldots \wedge \xi^{(-3)} \wedge \xi^{(-2)} \wedge \xi^{(-1)} ; \ \xi^{(j)} \ (j \in \mathbb{N}^{c}) \text{ は}$$

$$\text{UGM のある元に対する上のような基底 } \}$$

ここから UGM の上へは自然な射影があり、それによって $\widetilde{UGM}$ は UGM の上の主 GL(1)- 束となる。これがプリュッカー座標の不定性の幾何学的な意味である。上の無限外積は付随する線型束の切断で、基底 $e_S = \ldots \wedge e_{s_{-2}} \wedge e_{s_{-1}}$ により展開すると

$$\ldots \wedge \xi^{(-2)} \wedge \xi^{(-1)} = \sum_S \xi_S e_S \quad (\text{S はマヤ図形全体をわたる})$$

というように、係数にプリュッカー座標が現れる。プリュッカー座標は $\widetilde{UGM}$ の多様体としての座標系を与えるので、$\widetilde{UGM}$ を

$$\widetilde{UGM} = \{ (\xi_S) \in C^{\infty} - \{0\} \ ; \ \xi_S \text{ はプリュッカー関係式を満たす } \}$$

（C は定義体）というように定義してもよい。このとき UGM = $\widetilde{UGM}$/GL(1) である。

§２． 普遍グラスマン多様体に対する無限小変換

前節で見たように、$\widetilde{UGM} \cup \{0\}$ は ξ_S を座標に持つ無限次元アフィン空間の中のプリュッカー関係式の定義する多様体であり、その上のヴェクトル場とは $C[\xi_S$; S はすべてのマヤ図形を渡る] の導分（ｄｅｒｉｖａｔｉｏｎ

）でプリュッカー関係式の生成するイデアルを保つものと解釈される。無限小変換はそのようなヴェクトル場として実現される。

以下の議論で重要な役割を演じるのは次のような条件で定められるL_{ij}（$i, j \in \mathbb{N}$）と　M という二種類のヴェクトル場である。

$$L_{ij}\xi_{(\ldots s_{-2}s_{-1})} = \sum_{k<0} \delta_{js_k} \xi_{(\ldots s_{k-1}\, i\, s_{k+1}\ldots)},$$

$$M\xi_{(\ldots s_{-2}s_{-1})} = \xi_{(\ldots s_{-2}s_{-1})}$$ （すべてのs_{-1}, s_{-2}, ...に対して）

これらがプリュッカー関係式のイデアルを保つことはイデアルの生成系

$$\mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{-3}s_{-2};\ \ldots s'_{-1}s'_0) := \sum_{i<0} (-)^i \xi_{(\ldots s_{-3}s_{-2}s'_i)}\xi_{(\ldots s'_{i-1}s_{i+1}\ldots)}$$

に対して

$$L_{ij}\mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{-2};\ \ldots s'_0) = \sum_{k\le -2} \delta_{js_k} \mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{k-1}\, i\, s_{k+1}\ldots;\ \ldots s'_0)$$

$$+ \sum_{k\le k} \delta_{js'_k} \mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{-2};\ \ldots s'_{k-1}\, i\, s'_{k+1}\ldots),$$

$$M\ \mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{-2};\ \ldots s'_0) = 2\ \mathrm{Pl\ddot{u}}(\ldots s_{-2};\ \ldots s'_0)$$

となることから直ちに判る。これらは従って　UGM 上のヴェクトル場すなわち無限小変換を与え、さらに、容易に確かめられるように次のような交換関係を満たすリー代数をなす。

$$[L_{ij}, L_{k\ell}] = \delta_{kj}L_{i\ell} - \delta_{i\ell}L_{kj}, \quad [L_{ij}, M] = 0$$

L_{ij} は　行列単位　E_{ji}　（j 行 i 列に 1 、他は 0 の成分をもつ$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の行列）の普遍グラスマン多様体への無限小作用に対応するものである。実際 E_{ij}

とL_{ij} は同じ形の交換関係に従う。その意味で$\{L_{ij}, M\}$のなすリー代数は無限行列環に Mの生成する１次元の可環リー代数を直和したものである。しかしながら、我々の問題とするのは実はこのリー代数ではない。

ＫＰ方程式の理論で実際に必要になるのはこれらの基本的な要素のある種の無限和である。具体的には $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}L_{ij}$, ここに$a_{ij}$ はあるN に対して $a_{ij} = 0$ for $i - j > N$ となるような無限行列の成分である。上に注意したことにより、これは$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{ji}$ という無限行列に対応する。例えば、ＫＰ方程式の時間発展およびゲージ変換の無限小変換は $\sum_{i\in\mathbb{Z}} L_{i+n,i}$ （無限行列として$\sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+n} = \Lambda^n$, ここで $\Lambda = \sum E_{i,i+1}$, が対応する）で生成される。

この様な無限和は実はそのままでは意味をなさない。それは、対角部分$\Sigma a_{ii}L_{ii}$を各プリュッカー座標 ξ_S に作用させると発散が生じるからである。実際、

$$\Sigma a_{ii}L_{ii}\xi_{(\ldots s_{-2}s_{-1})} = \sum_{k<0} a_{s_k s_k}\xi_{(\ldots s_{-2}s_{-1})}$$

となって、対角成分を無限個足し上げてしまって発散する。非対角成分については、$i\neq j$ である限り高々有限個の(i,j) を除き$L_{ij}\xi_S = 0$ となる。（証明： $L_{ij}\xi_S$ は ξ_S において$S=(\ldots s_{-2}s_{-1})$ の成分のうち$s_k=j$となるものを i で置き換えたものに他ならないが、そういうs_kが無ければ$L_{ij}\xi_S = 0$ であるし、また、s_k以外にS の中に既にi が在れば添字が重なってやはり$L_{ij}\xi_S = 0$である。ところが容易に判るように、高々有限個の(i,j) を除いて実際そう

なる。）従って、非対角成分からは発散は出てこない。

この発散を除くため、L_{ij} を次のように補正したものを導入する。

$$\tilde{L}_{ij} := L_{ij} - \theta(i<0)\delta_{ij}M, \quad \text{ここに} \quad \theta(i<0) = 1 \ (i<0);\ 0 \ (i\geq 0)$$

上の$\Sigma a_{ij}L_{ij}$ の代わりに$\Sigma a_{ij}\tilde{L}_{ij}$ を考えると（これはフェルミ場を用いる変換理論との対応で言えば、２個のフェルミ場の同時空点での積を正規積で置き換えることにあたる）今度は発散が生じないことが判る。これらとM との1次結合からなる無限小変換の全体

$$\widetilde{gl}(\infty) := \{\Sigma a_{ij}L_{ij} + aM;\ \ a_{ij},\ a \in C,\ \text{ある}N\ \text{に対して}$$
$$a_{ij} = 0\ (i-j > N)\ \}$$

はリー代数をなす。交換関係は$\tilde{L}_{ij}$, M に対する

$$[\tilde{L}_{ij}, \tilde{L}_{k\ell}] = \delta_{kj}\tilde{L}_{i\ell} - \delta_{i\ell}\tilde{L}_{kj} + (\theta(i<0) - \theta(j<0))\delta_{kj}\delta_{i\ell}M,$$
$$[\tilde{L}_{ij}, M] = 0$$

からきまる。右辺のM に比例する部分が中心拡大を与える異常項である。これは無限行列のリー代数 $gl(\infty) := \{\Sigma a_{ij}E_{ji};\ \ a_{ij}$は上とおなじ条件を満たす$\}$の 1 次元中心拡大である。

この無限次元リー代数の中にはさまざまなカッツ・ムーディ代数がはいっているし、ＫＰ方程式との関連では次の$U_n^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, の生成するリー代数が重要である。

$$U_n^{(k)} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{i}{k} \tilde{L}_{i+n,i}$$

交換関係は次のようになる。

$$[U_n^{(k)}, U_m^{(\ell)}] = \sum_{0\leq j\leq \max(k,\ell)} \left(\binom{\ell+m}{j}\binom{k+\ell-j}{\ell} - \binom{k+n}{j}\binom{k+\ell-j}{k} \right) \times U_{n+m}^{(k+\ell-j)} + \delta_{n+m}(-)^{\ell}\binom{\ell+m}{\ell+k+1}M$$

$U_n^{(0)}$ が既に述べた時間発展（n ＞ 0）およびゲージ変換（n ＜ 0）の生成元で、ハイゼンベルグ代数の交換関係を満たしている。（$U_0^{(0)}$ は零作用素になる。）また、$U_n^{(1)}$ はいわゆるヴィラソロ代数の交換関係に従う。$\{U_n^{(0)}, U_n^{(1)}\}$ で閉じたリー代数が出来ていることに注意されたい。最近の（超）弦理論でリーマン面のモジュライとの関連で議論されているのは実質的にはこのリー代数であると言ってよい。

§3. ＫＰ方程式に対する無限小変換

ＫＰ方程式の解空間は普遍グラスマン多様体と対応付けられるので、前節の変換理論はＫＰ方程式の変換理論に翻訳できる。それを見るにはタウ函数を調べれば良い。タウ函数は無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \ldots)$ と $\widetilde{UGM}$ の点 ξ の函数で、次のように与えられる。

$$\tau(t, \xi) := \sum \xi_S \chi_S(t) \quad \text{（和はマヤ図形全体にわたる）}$$

ここで $\xi_S(t)$ はいわゆるシューア多項式で、

$$p_n(t) = \sum_{n=n_1+n_2+\dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots / n_1! n_2! \dots ; \quad p_0(t) = 1$$

という多項式 $p_n(t)$ $(n \geq 0)$ を用いて

$$\chi_S := \det(p_{s_i - j}(t))_{i,j<0}$$

というように定義される。但し、この無限行列式はプリュッカー座標の場合と同様に、十分大きい自然数Nをとって添字の動く範囲を-1から-Nに限定した小行列式（Nが十分大きいところでNに依らなくなる）で定義する。詳細はここでは省くが、KP方程式に関する基本的な情報はすべてこのタウ函数に集約されている。

普遍グラスマン多様体における基本的無限小変換 L_{ij} に対応して、シューア函数に対する作用素 T_{ij} を

$$T_{ij}\chi_{(\dots s_{-2} s_{-1})} = \sum_{k<0} \delta_{js_k} \chi_{(\dots s_{k-1} i s_{k+1} \dots)}$$

で定義する。実はシューア函数の全体は t の多項式の空間C［t］の基底になっているので、T_{ij} はC［t］上の線型作用素と見なせる。あとでも触れるが、T_{ij} は t に関する多項式係数の微分作用素（但し、t が無限変数よりなるので、無限個の項を含む）として実現できる。

タウ函数を通じて T_{ij} と L_{ij} は

$$L_{ij}\tau(t, \xi) = T_{ji}\tau(t, \xi)$$

という関係で結ばれている。添字の順序が入れ替わることに注意。このこと

から T_{ij} の交換関係は次のようになる。

$$[T_{ij}, T_{k\ell}] = \delta_{kj}T_{i\ell} - \delta_{i\ell}T_{kj}$$

ちなみに、Mに対応するのは恒等作用素 1である。

同様に、$\tilde{L}_{ij}$, $U_n^{(k)}$ に対してシューア多項式への作用素 $\tilde{T}_{ij}$, $T_n^{(k)}$ がきまる。この場合も、$T_n^{(k)}$ を定義する無限和において補正された作用素 $\tilde{T}_{ij}$ を用いないと発散が生じる。

これらの作用素の具体的な表示は頂点作用素(vertex operator)と呼ばれるものを通じて得られることが判っている。その結果として、これらはtに関する多項式係数線型微分作用素になる。特に、$T_n^{(k)}$ は高々k+1階の微分作用素(それでもtが無限変数のために無限個の項を含むが)となる。最初の方を示しておくと、

$$T_n^{(0)} = \partial/\partial t_n \ (n > 0); \quad 0 \ (n = 0); \quad -nt_{-n} \ (n < 0),$$

$$T_n^{(1)} = (1/2)\Sigma_{n=i+j} :T_i^{(0)}T_j^{(0)}: - (n+1)/2 \ T_n^{(0)}, \ \ldots$$

ここで : : は : : の中身に対してtを左に、∂/∂tを右に置き直す操作(ボソン的正規積)をあらわす。例えば、$:t_n t_m: = t_n t_m$, $:t_n \partial/\partial t_m: = :\partial/\partial t_m \cdot t_n: = t_n \partial/\partial t_m$, $:\partial/\partial t_m \partial/\partial t_n: = \partial/\partial t_m \partial/\partial t_n$, etc.

§4. 高次元における発散の問題

鈴木、大山の記事に紹介されているように、高次元化はマヤ図形の概念を高次元的に拡張することから始まる。ＫＰ方程式の場合には添字集合として整数全体（つまり、１次元の無限格子）を採った。自然な拡張はそれを多次元の格子で置き換えることである。そのようなものの採り方にはいろいろな可能性があるが、r次元の半無限格子 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1}$ を採って、全添字集合を I とする。

この中に、"真空"を決める添字集合 I_{vac} を

$$I_{vac} + \alpha \subset I_{vac} \quad \text{for any} \quad \alpha \in \mathbb{N}^{c} \times \mathbb{N}^{r-1}$$

という条件を満たすようにとる。I_{vac} の補集合を I^{c}_{vac} と書くならば、この条件は $I^{c}_{vac} + \alpha \subset I^{c}_{vac}$ $(\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{r-1})$ ということと同じである。この様な"真空"の採り方はいろいろあって、それぞれに対して一つの高次元理論が付随する。（尤も、だからといってそれ等が全て面白いものであるとは限らない。）前述のＫＰ方程式の場合は $I_{vac} = \mathbb{N}^{c} \subset I = \mathbb{Z}$ と選んだわけである。

添字集合の組（I_{vac}, I）を上のように一つ選んで固定するとき、マヤ図形（正確には、その拡張としての数列Ｓ）に対応するのは I_{vac} から I への"殆ど恒等写像に近い"写像 S あるいは、同じ事だが、添字列 S =

$(s_\alpha)_{\alpha\in I_{vac}}$ で高々有限個の添字 α を除き $s_\alpha = \alpha$ となるものである。 I に適当な全順序が与えられているときには、その順序に従って単調増加に並べられているものを特に（狭義の）マヤ図形と呼んでも良い。

このような (I_{vac}, I) に対してグラスマン多様体 $GM(I_{vac}, I)$ なるものを考えることが出来る（鈴木、大山の記事参照）。大ざっぱに言えば、これは e_α, $\alpha \in I$, という無限個の基底をもつ線型空間 $V(I)$ の線型部分空間で e_α, $\alpha \in I_{vac}$, の張るものと"同じくらいの大きさを持つ"もののなす多様体である。（ＵＧＭの定義は事実そういう趣旨を厳密に定式化したものだった。）そのプリュッカー座標は上に述べた意味で拡張されたマヤ図形Ｓを添字にもつ ξ_S 達で、前と同様プリュッカー関係式を満たすものである。（むしろ、最初から、そのような座標系と定義方程式を持つ無限次元多様体として理解する方がわかりやすいかも知れない。）

プリュッカー座標に作用する基本的無限小変換として、前と同様につぎのような $L_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in I$, と M を導入することが出来る。

$$L_{\alpha\beta}\xi_S = \sum_{\gamma\in I} c\ \delta_{\beta s_\gamma}\xi_{S;s_\gamma\to\alpha} \quad ; \quad M\xi_S = \xi_S$$

ここで $S;s_\gamma\to\alpha$ は $S = (s_\alpha)$ において s_γ を α で置き換えたものをあらわす。これらがプリュッカー関係式のイデアルを保つことは前と全く同様にして確かめられる。

さて、これらの無限和に意味を持たせられるだろうか。例えば、ＫＰ方程式の場合の時間発展やゲージ変換の対応物として

$$U_{\nu}^{(0)} = \sum_{\alpha \in I} L_{\alpha+\nu,\alpha} \quad (\nu \in I)$$

というものを考えることは自然である。ＫＰ方程式のＵＧＭの場合は $\nu = 0$ にあたるときにのみプリュッカー座標への作用が発散し、それは和の各項からＭに比例する補正項を引き去ることで有限化された。今の場合には $\nu = 0$ については全くおなじ処方が適用される。しかし問題はそれ以外の $U_{\nu}^{(0)}$ の作用が（以下に見るように）一般にはプリュッカー座標の無限１次結合を生じることである。そのような無限和はそれ自体としては発散しているとは言えないが、無限小変換を繰り返し施すこと（例えば交換子を計算するためにはそれが絶対に必要）を考えると、そういうものも当然無限小変換作用素の定義域に入っていなければならない。そうすると今度は新たな発散が現れるのである。厄介なことに、この発散はもはやＭに比例する補正項を引き去る程度のことでは除けないものになる。

話をはっきりさせるために、鈴木、大山の記事で扱われている= $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $I_{vac} = \mathbb{N}^{c} \times \mathbb{N}$ という例で説明する。（一般に多次元では同じような事情がどんな場合でも必ず生じるようである。）このとき、例えば”真空” $\phi = (\alpha)_{\alpha \in I_{vac}}$ のプリュッカー座標 ξ_{ϕ} に対する $U_{(0,1)}^{(0,0)} = \Sigma L_{(i,j)(i+1,j)}$ の作用は

$$U_{(0,1)}^{(0,0)} \xi_{\phi} = \sum_{i<0} \xi_{\phi;(i,0)\to(i,1)}$$

となり、確かにプリュッカー座標の無限和を引き起こしている。注意すべきは、このときにMに比例するどんな補正項を付け加えても無限和が有限和になることはない、ということである。さて、ここで引き続いて

$$U^{(0,1)}_{(0,1)} := \sum_{(i,j)\in I} iL_{(i-1,j)(i,j)}$$

という無限小変換（これもある基本的な意味を持つ無限小変換である）を施してみると、定義に戻って考えれば容易に判るように、

$$U^{(0,1)}_{(0,1)}U^{(0,0)}_{(0,1)}\xi_\phi = \sum_{i<0} i\xi_{\phi;(i,0)\to(i,0)} = \sum_{i<0} i\xi_\phi$$

となる。明らかに、右辺は負の無限大定数が ξ_ϕ に掛かって発散している。

要するに、$U^{(0,1)}_{(0,1)}$ は $U^{(0,0)}_{(0,1)}$ が生成するようなプリュッカー座標の無限和には作用できないのである。この事態を解決するためには、これらの無限小変換作用素を適当に補正して、更にその定義域（つまり、プリュッカー座標のどのような函数まで考えるか）も適切に設定して、全体としてどこにも発散が生じないようにしなければならない。しかしながら、筆者が無い知恵を振り絞っていろいろ試みた限りでは、そういう修正の仕方は見つからなかった。むしろ、後に触れるような意味で、何か根本的に考え方を変えることの必要性をを痛感させられた次第である。

§5．展望

このような困難の兆候は実はアノマリーを論ずる以前の段階で、つまりグラスマン多様体そのもの（ここではプリュッカー座標の”比”のみが問題になるのでアノマリーは打ち消されて出てこないと期待されるが）のレベルでも既に現れている。その典型は時間発展の方程式の右辺が無限和を含んでいることである（本講究録の鈴木、大山両氏の記事を参照）。これはKP方程式の場合にはなかった事情である。この無限和は前述の量子論的発散と違って無限大定数を含むわけではない。しかし微分方程式そのものがそのような無限和を含んでいるならば、それがはたして高次元積分可能系として正しい定式化を与えていると言えるかどうか、大いに疑問である。そもそも、時間発展はグラスマン多様体への群作用の特別な場合として得られるのだから、その無限小表現である発展方程式に無限和が現れるということは、群の（無限小）作用自体が代数的でないこと、言い替えれば、我々のグラスマン多様体が”無限次元の代数多様体”として実は等質性をもたないということを意味する。これは代数解析的な理論構成をめざす立場から見て重大な欠陥である。

おそらく一つの解決策は高次元ではグラスマン多様体自体を考えるの止めて、かわりにその部分多様体をうまく選び、その上に限定された時間発展（当然、可能な時間発展の方向は一般にはグラスマン多様体上で素朴に考えるものより小さくなる）に対しては発展方程式における前述の無限和が有限和になる、というような状況を作り上げることであろう。事実、中屋敷の記事

で採り上げられているものはそのような例を与えていると考えられるし、他にもヤン・ミルズ場や重力場に関連して例が作れる。これは事実上グラスマン多様体にソリトン方程式の場合のような”普遍的な役割”を期待することを止めることである。ソリトン方程式では普遍グラスマン多様体の部分多様体を選ぶことは（多成分）ＫＰ方程式の特殊化として個々のソリトン方程式を選ぶことにほかならないが、（多成分）ＫＰ方程式そのものも勿論積分可能系として意味がある。一方、今考えている高次元のモデルでは特殊化のみ微分方程式として意味があり、それに対して容れ物としてのグラスマン多様体に付随するのはそれ自体は無限和を含んでいて”記号的表現”でしかない微分方程式なのである。それでは変換理論の問題はどうなるか。微分方程式として意味があるのは上に述べたような個々の特殊化にすぎないから、特殊化それぞれに応じて個別に変換理論を作るしかないというのが一つの考え方であろう。上に掲げた三種類の例では実際にそのような変換理論が出来る。

場の量子論との関係から考えると、この問題に対して別の展望も開けてくるように思われる。そもそも高次元での発散に関する前述の議論は、理論構成そのものからして、フォック空間を初めから一つ固定してその中で考えようとするもののように思われる。２次元場の量子論の場合はたまたまそれで間に合ったのだが、高次元の場合には物理的に言ってそのような設定自体に問題があるらしく、いわばグラスマン多様体の各点ごとに別のフォック空間を仮定しなければならないようである。というよりは、むしろ、そのような

さまざまなフォック空間（あるいは真空、あるいは一つの場の理論と言ってもよい）の集まりとして”本当の意味でのグラスマン多様体”というべきパラメーター空間を定義すべきなのである。そのようにして現れるパラメーター空間は実際にはグラスマン多様体とは似ても似つかぬものになるかもしれないし（大いにありそうなことである）、また、微分方程式としての積分可能系とも必ずしも対応しない部分を含んでいるかもしれない。それならばそれでかえって面白いのではないか？

そのようなパラメーター空間をどのようにして記述するかということが問Lであるが、アノマリーについては高次元の場合も含めて随分いろいろなことが判ってきているので、そこからヒントを採り出すことが出来るだろう。例えば、普遍グラスマン多様体とその上のプリュッカー座標の直線束との関係は、アノマリーの記述に場の配位空間上のいわゆる”行列式束”がはたす役割と基本的には同じである。従って、そのような行列式束の切断の”完全系”をプリュッカー座標の対応物とみなして理論を構成することが考えられる。但し、そのような切断の系が行列式束の底空間の任意の２点を分離しないこともあり得るが、その場合には我々が採るべき幾何学的対象はそのような分離できない点同志を同一視したものであろう。この様なことはいままでのアノマリーの研究ではあまり問題にされていなかったように思われる。実際、いままでは行列式束のある特定の切断（ラプラス・ディラック作用素の行列式等）のみを問題にすることが多かったからである。他の切断も併せて

考えるということは多点相関函数も全部考慮に入れるということに他ならない。尤も、最近では（超）弦模型と普遍グラスマン多様体との関連が判ってきたので、この様な視点も採り入れられるようになってきているらしい。

勿論、このような無限次元多様体を作っただけでは我々の要求は半分しか実現されていない。我々が本当に欲しいのは、この様な無限次元多様体がなんらかの”等質性”あるいはそれに近い性質をもつ状況である。そのような状況では多点相関函数全体が大きな変換群あるいはリー代数で互いに結ばれている訳であるから、目下流行の２次元の共形的場の量子論と非常によく似ている。従って上のようなプログラムは共形的場の量子論の拡張のひとつの方向でもあり得るわけで、積分可能系とは独立の、場の量子論自体の問題としても非常に興味がある。実際、アノマリーの典型例としてよく引合いに出される、ゲージ場と結合したカイラルフェルミオンの場合が、まさにそのような等質性をもつ例を与えているのではないかと思われる。

数理研の菅野浩明氏にはアノマリーについていろいろと教えていただきました。この記事の中でアノマリーについて何か変な事を言っている箇所があれば、それは筆者の理解不足によるものです。また、§４で述べたような発散の問題に関しては北大の山田浩嗣氏の批評が大いに参考になりました。両氏に対して深く感謝致します。

（1987年10月）